

Grado en Física

Examen de Cálculo I - Convocatoria de septiembre 2014

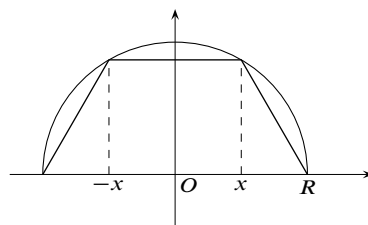
Ejercicio 1.

a) (1 punto) Sea $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Prueba que hay algún $c \in [-\pi/2, \pi/2]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \sin c$.

b) (1 punto) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2[$ se verifica que $x \cos x \leq \sin x$.

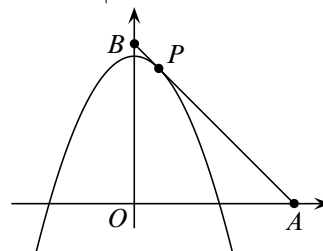
Ejercicio 2. (2 puntos)

Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R . Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.



Ejercicio 3. (2 puntos)

Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



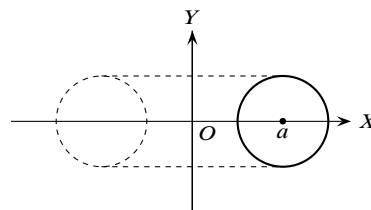
Ejercicio 4. (2 puntos)

El círculo limitado por la circunferencia de ecuación

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

donde $a > 1$, gira alrededor del eje OY . Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido:

- Por el método de los discos o arandelas.
- Por el métodos de las capas o tubos.



Ejercicio 5. a) (1 punto) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 8^n; \quad b) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1 - \sqrt{n+1}}$$

b) (0,5 puntos) Calcula el límite de la sucesión: $x_n = \left(1 + \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\right)^n$.

c) (0,5 puntos) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{(\ln(1+x))^2}$.